数理解析研究所講究録
990巻 1997年 244-249

方程式 $x^d=0$ に対する regula falsi の大域収束性について

龍谷大学 理工学部 数理情報学科 山岸 義和 (YAMAGISHI Yoshikazu)

一変数函数 $p(x)$ の零点を求めるアルゴリズム SOR regula falsi は、漸化式

$$x_{i+2}=x_i-\lambda p(x_i)\frac{x_i-x_{i+1}}{p(x_i)-p(x_{i+1})} \tag{1}$$

で定義される。ただし λ は実定数である。この漸化式は平面の写像

$$(x,y)\mapsto\left(y,x-\lambda p(x)\frac{x-y}{p(x)-p(y)}\right)$$

の反復と同等である。

$p(x)=x^d$ のとき、変数変換 $x=u,\ y=uv$ によって平面の力学系

$$(u,v)\mapsto(uv,f(v)),\qquad f(v)=\frac{1}{v}\left(1-\frac{\lambda}{1+v+\cdots+v^{d-1}}\right)$$

と同等である。つまり、漸化式 (1) の初期値 $x_0,\ x_1$ に対して $v=x_1/x_0$ とおけば

$$x_n=x_0\prod_{k=0}^{n-1}f^k(v),\qquad n\geq 1$$

が成り立つ。

$\lambda=1$ のとき (ふつうの reluga falsi)、一次元力学系 f は区間 $[0,1]$ 上に不動点 α を持つ。d 位の臨界点 $x=0$ が α に吸引されることから、α の安定領域 $A(\alpha)$ は完全不変であり、$A(\alpha)$ 以外の Fatou 成分は全て単連結であることがわかる。実験によれば、すべての臨界点は α に吸引されるため、f の Julia 集合は測度零の Cantor 集合である。これにより、方程式 $x^d=0$ に対する regula falsi の大域収束性が得られる。

収束の速さ

$$\varphi=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\log\left|f^k(v)\right|$$

をパラメータ λ の函数 (一般に一価函数でない) とみなしてそのグラフを描いたのが図1上 ($d=2,\ 1\leq\lambda\leq 2$), 図2上 ($d=3,\ -0.3\leq\lambda\leq 2.2$), 図3上 ($d=4,\ -0.3\leq\lambda\leq 2.2$) である。水平軸は $\varphi=0$ を表す。また、写像 $(\lambda,v)\mapsto(\lambda,f(v))$ のアトラクタを描いたのが図1下 ($d=2$), 図2下 ($d=3$), 図3下 ($d=4$) である。

$d=2,\ \lambda(\lambda-2)>0$ とする。このとき、f は安定な二周期軌道 $\{0,\infty\}$ をもち、次が成り立つ。

Proposition 1 v の軌道が $\{0,\infty\}$ に吸引されるとき、$\lim_{n\to\infty}f^{2n}(v)=\infty$ ならば x_{2n} は有限な極限値を持ち $\lim_{n\to\infty}x_{2n+1}=\infty$ である。$\lim_{n\to\infty}f^{2n+1}(v)=\infty$ ならば x_{2n+1} は有限な極限値を持ち $\lim_{n\to\infty}x_{2n}=\infty$ である。

(proof) $v_n=f^n(v)$ とおく。$\lim_{n\to\infty}f^{2n}(v)=\infty$ の場合

$$x_{2n}=x_0(v_0v_1)\cdots(v_{2n-2}v_{2n-1})=x_0\left(1-\frac{\lambda}{v_0+1}\right)\cdots\left(1-\frac{\lambda}{v_{2n-2}+1}\right).$$

ここで

$$v_{2n} = f(f(v_{2n-2})) = (1-\lambda)v_{2n-2} + O(1), \qquad (n \to \infty)$$

より級数 $\sum_n \left|\frac{\lambda}{v_{2n+1}}\right| < \infty$ が絶対収束するから $\lim_{n\to\infty} x_{2n}$ は収束する。$\lim_{n\to\infty} f^{2n+1}(v) = \infty$ の場合も同様である。 ∎

$d=2$, $(23-\sqrt{17})/16 = 1.1798 < \lambda < 1.185$ のとき、$\varphi = \varphi(\lambda)$ は二価函数である。とくに $\lambda = (23-\sqrt{17})/16$ のとき f の Julia 集合は区間 $I \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ であり、f は I 上で絶対連続なエルゴード不変測度 $d\mu$ をもつから、φ の一方の値は $\int_I \log|v|\ d\mu$ で表される。f の安定な固定点を $\alpha \in \mathbb{R}$ とすれば φ のもう一方の値は $\log|\alpha|$ である。以下に示すように、これら二つの収束の速さは一致する。

Proposition 2 f を実係数二次有理函数とし、f の *Julia* 集合が区間 $I \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ であるとする。f の安定固定点を $\alpha \in \mathbb{R}$ とする。このとき I 上の f の絶対連続なエルゴード不変測度を $d\mu$ とすると、

$$\log|\alpha| = \int_I \log|v|\ d\mu$$

が成り立つ。

(proof) 不変測度 $d\mu$ を計算するために、f が Blaschke 積と semi-conjugate であることをみよう。f の臨界点のひとつ c によって $I = [f(c), +\infty] \cup [-\infty, f(f(c))]$ と表される。Möbius 変換

$$v = M(y) = \alpha\frac{y-b}{y-d}$$

が $M(-1) = f(c), M(1) = f(f(c)), M(\infty) = \alpha$ をみたすように係数 b, d を定める。$g(y) = M^{-1}(f(M(y)))$ とおく。Joukowski 写像

$$j(w) = \frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right)$$

と、てきとうな Blaschke 積

$$B(w) = w\frac{w-a}{-aw+1}$$

によって

$$g \circ j = j \circ B$$

が成り立つ。Blaschke 積 B は原点を固定点にもつから、B は単位円周上の Lebesgue 測度を保つ。したがって区間 $[-1,1]$ 上の 確率測度

$$\frac{dy}{\pi\sqrt{1-y^2}}$$

は g で不変である。簡単な複素積分の計算により

$$\int_I \log|v|\ d\mu = \int_{-1}^{1} \log\left|\alpha\frac{y-b}{y-d}\right| \frac{dy}{\pi\sqrt{1-y^2}} = \log|a|$$

が成り立つ。 ∎

一般の $d \geq 2$ で、$|\lambda - 1| > 1$ のとき、f の二周期軌道 $\{0, \infty\}$ は安定だが、それ以外に安定軌道が存在することもある。方程式 $x^3 = 0$ に対する SOR regula falsi で、二周期軌道 $\{0, \infty\}$ 以外の安定周期軌道を f が持つような複素パラメータ λ の存在を複素領域 $|\lambda - 1| > 1$, $1.8 \leq \Re(\lambda) \leq 1.9$, $0.7 \leq \Im(\lambda) \leq 0.8$ の範囲で示したのが図 4 であり、マンデルブロート集合の形状をしている。

図1. d=2

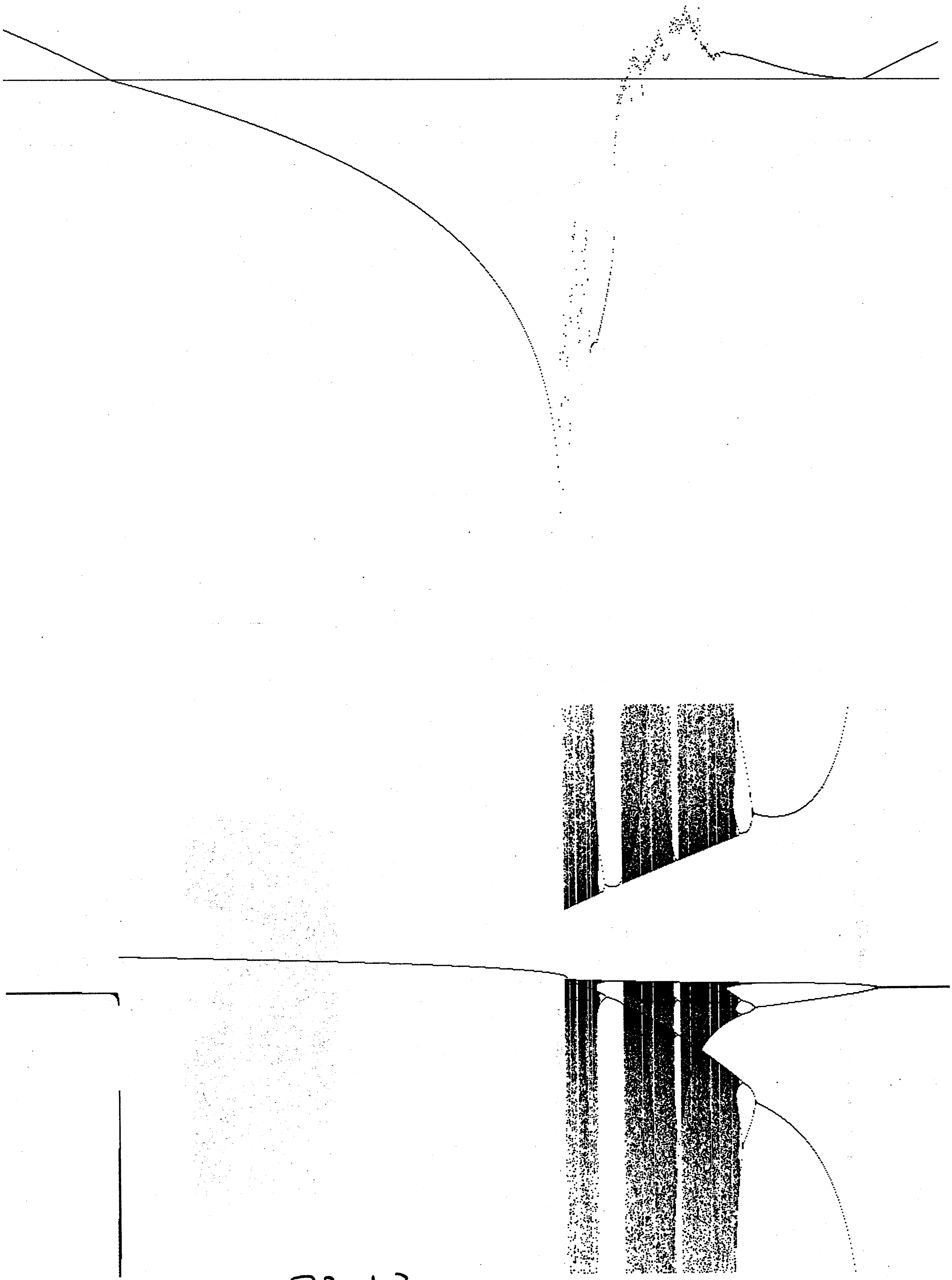

図2. d=3

図3. d=4

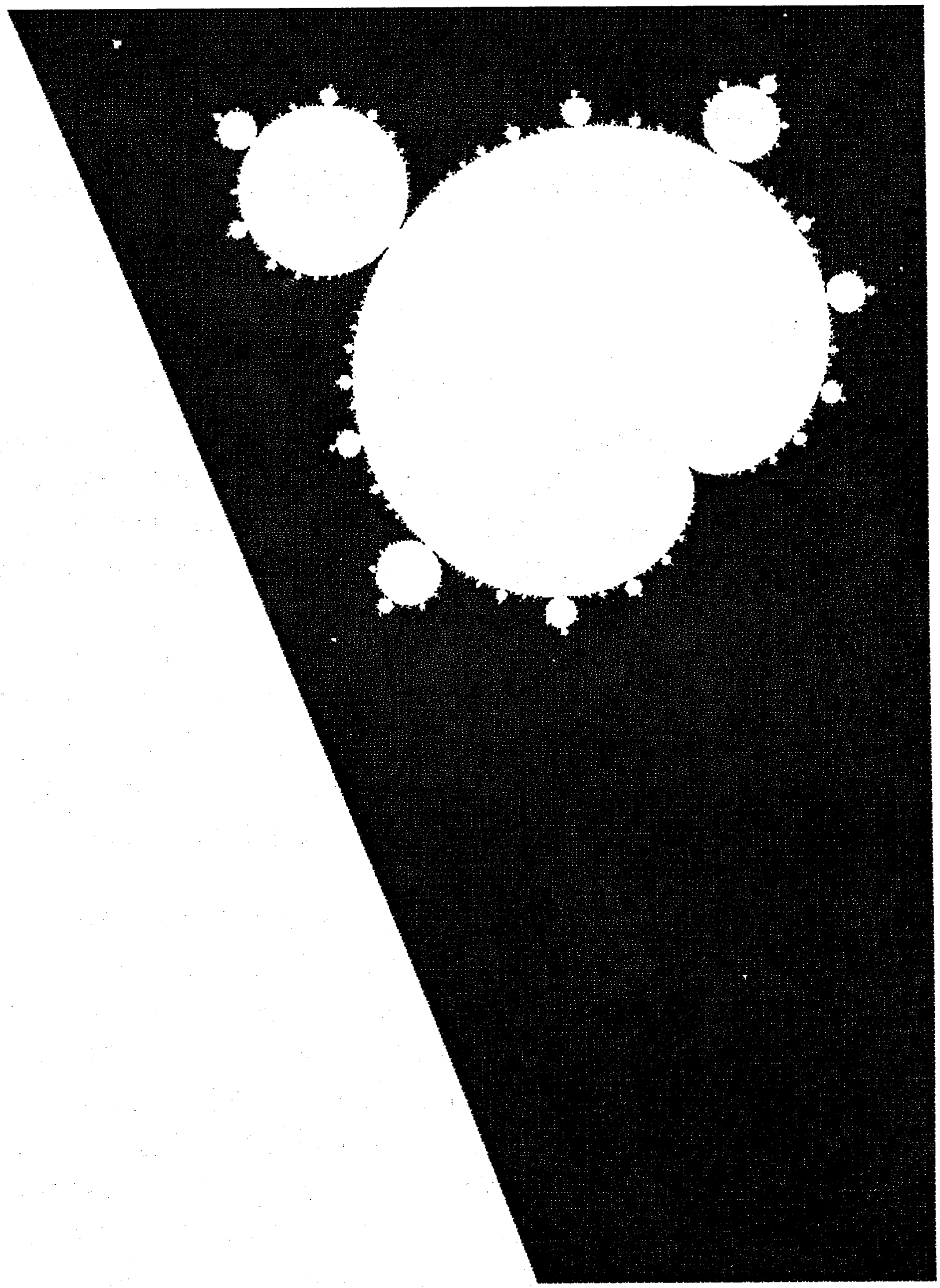

図4